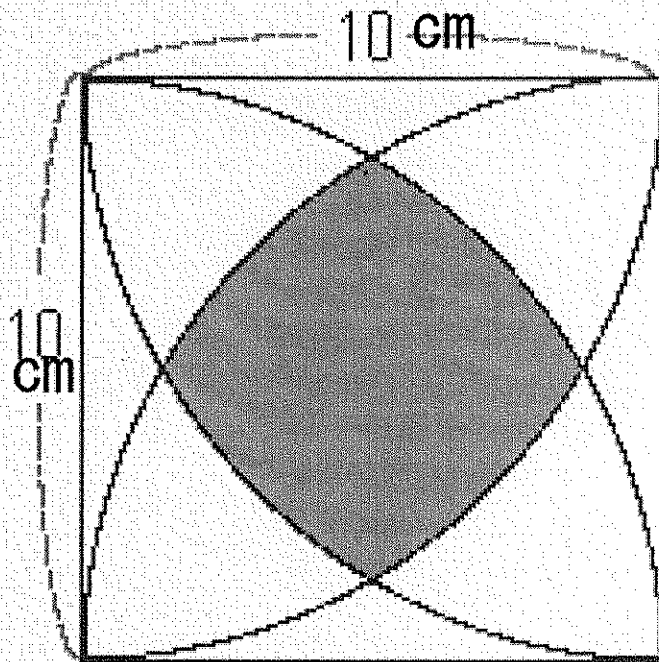


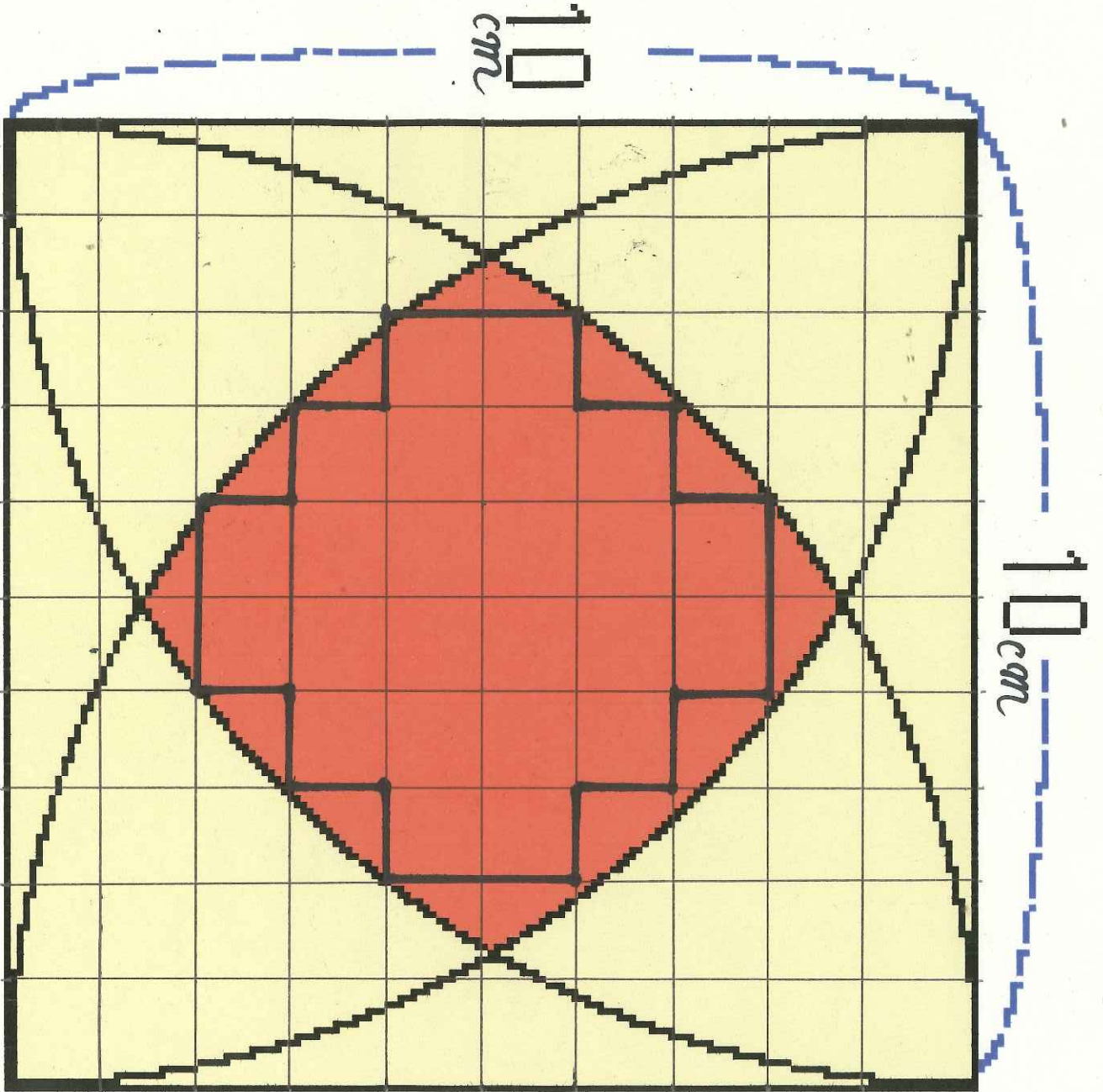
資料 1

問題：

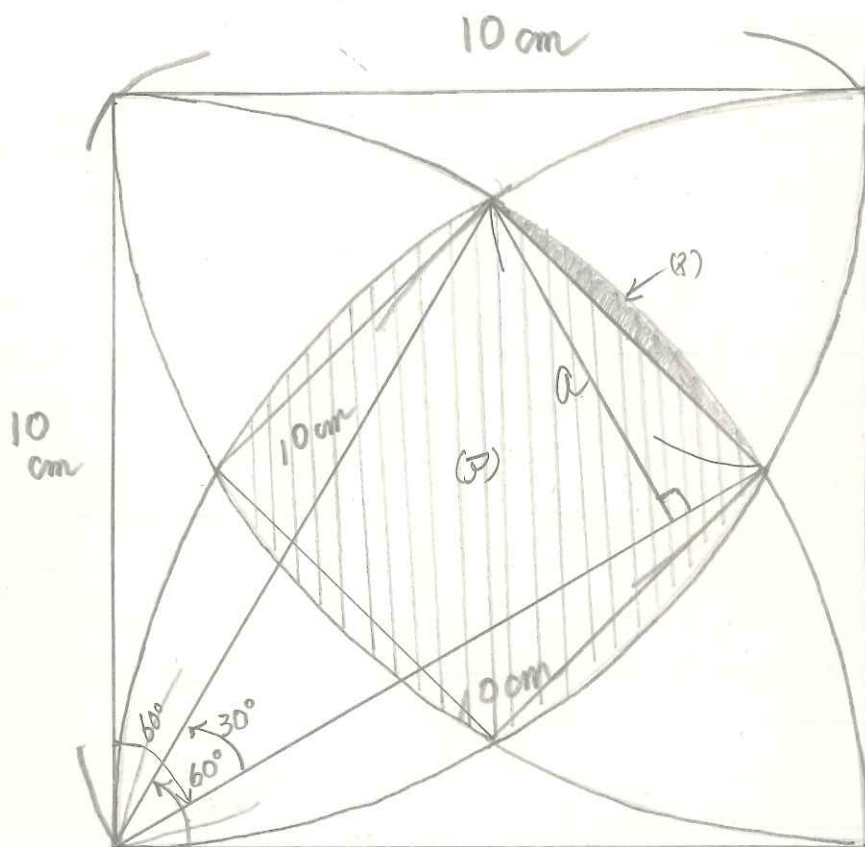
1 辺 10 cm の正方形があり、それぞれ 4 つの角を中心とする円が重なり合った部分の面積を求めなさい。



解法1



解法2 (幾何的解法)



(B)の部分の面積 余弦定理より $a^2 = 10^2 + 10^2 - 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \cos 30^\circ$
 $= 200 - 100\sqrt{3}$

(A)の部分の面積

$$4 \left(10^2 \pi \times \frac{30^\circ}{360^\circ} - \frac{1}{2} \times 10 \sin 30^\circ \times 10 \right)$$

$$= 4 \left(\frac{25\pi}{3} - 25 \right)$$

$$= \frac{100\pi}{3} - 100$$

$$100 - 100\sqrt{3} + \frac{100\pi}{3}$$

(B) + (A)

$$\left(200 - 100\sqrt{3} \right) + \left(\frac{100\pi}{3} - 100 \right)$$

$$= \frac{300 - 300\sqrt{3} + 100\pi}{3}$$

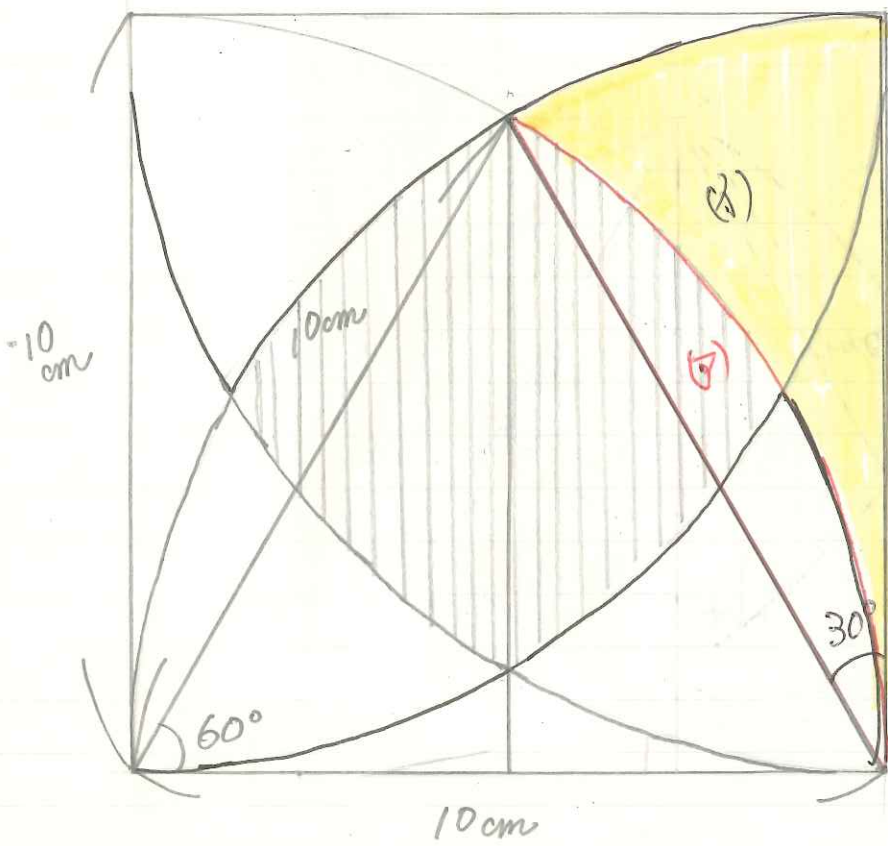
$$\approx 31.51$$

答 31.51 cm²

解法3 (幾何的解法)

⑦ $10 \times 10 \times 3.14 \times \frac{60}{360} - 8.6 \times \frac{1}{2} \times 10$
 $314 \times \frac{1}{6} - \frac{86}{2}$
 $\frac{314}{6} - 43$

No. $\frac{52}{30}$
 Date $\frac{10}{12}$ / $\frac{20$



8.6 cm

$10 \sin 60^\circ = 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $= 5\sqrt{3}$

(a)の部分の面積 $10^2 \pi \times \frac{60^\circ}{360^\circ} - \frac{1}{2} \times 10 \times 10 \sin 60^\circ$
 $= \frac{50\pi}{3} - 25\sqrt{3}$

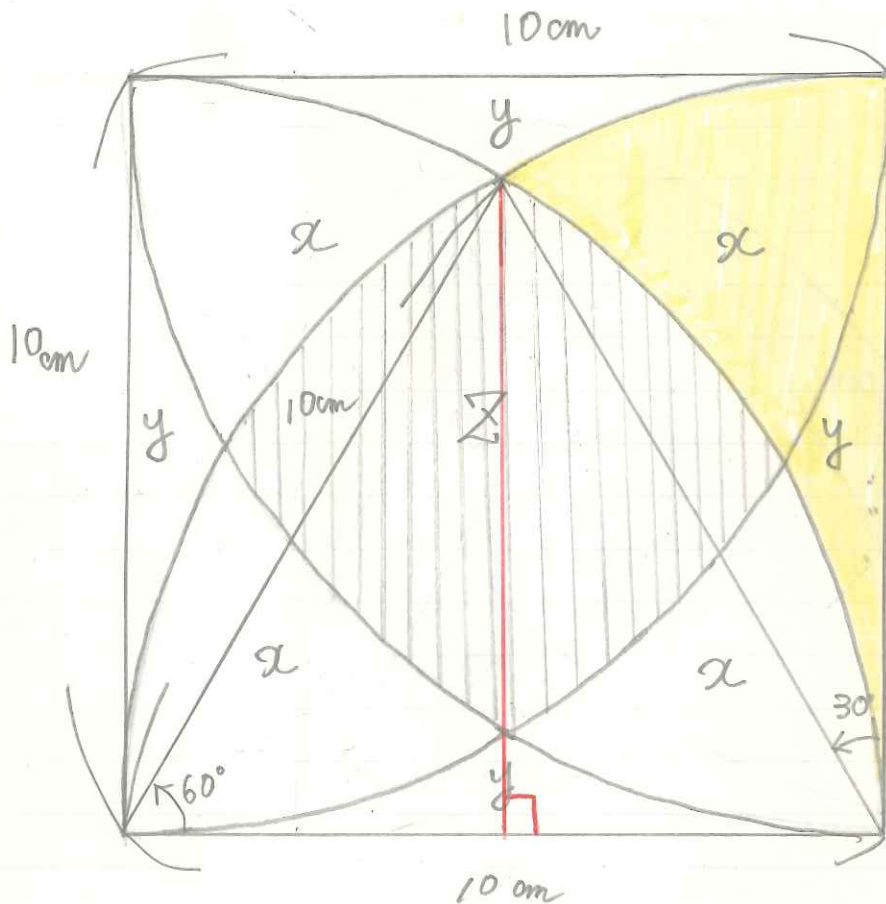
(b)の部分の面積 $10^2 \pi \times \frac{30^\circ}{360^\circ} = \frac{25\pi}{3}$

黄色の部分の面積 $\frac{25\pi}{3} - \left(\frac{50\pi}{3} - 25\sqrt{3} \right) = 25\sqrt{3} - \frac{25\pi}{3}$
 (a) - (b)

$S = 10^2 - 4 \left(25\sqrt{3} - \frac{25\pi}{3} \right)$
 $= 100 - 100\sqrt{3} + \frac{100\pi}{3}$

$S = \frac{300 - 300\sqrt{3} + 100\pi}{3} \dots \dots$ (答)

解法4 (代数的解法)



$$S = 10^2 - 4(x+y) \quad \text{--- ①}$$

$$x+y = \frac{30^\circ}{360^\circ} \times 10^2 \pi - \left(\frac{60^\circ}{360^\circ} \times 10^2 \pi - \frac{1}{2} \times 10 \times 10 \sin 60^\circ \right)$$

$$= \frac{30^\circ}{360^\circ} \times 10^2 \pi - \frac{60^\circ}{360^\circ} \times 10^2 \pi + \frac{1}{2} \times 10^2 \sin 60^\circ$$

$$= 10^2 \pi \left(\frac{30^\circ}{360^\circ} - \frac{60^\circ}{360^\circ} \right) + 25\sqrt{3}$$

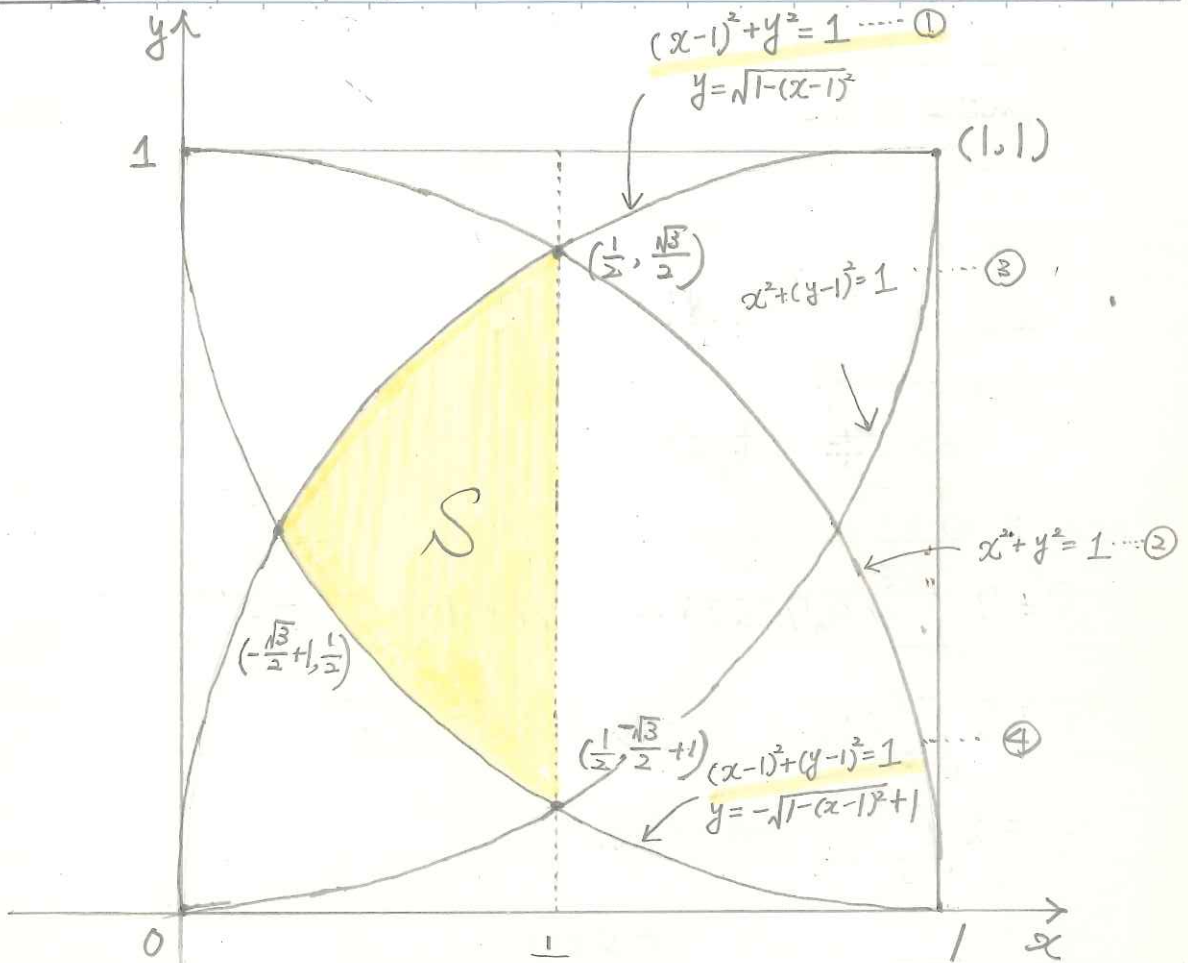
$$x+y = -\frac{25}{3}\pi + 25\sqrt{3} \quad \text{--- ②}$$

$$\text{②代入①得} \quad S = 10^2 - 4\left(25\sqrt{3} - \frac{25}{3}\pi\right)$$

$$= 100 - 100\sqrt{3} + \frac{100}{3}\pi$$

$$\therefore S = \frac{300 - 300\sqrt{3} + 100\pi}{3} \quad \text{--- (答)}$$

解法5 (解析的解法)



$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 1 \cdots \textcircled{1} \\ x^2 + y^2 = 1 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\therefore (x, y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\begin{cases} x^2 + (y-1)^2 = 1 \cdots \textcircled{3} \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1 \cdots \textcircled{4} \end{cases}$$

$$\therefore (x, y) = \left(\frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)$$

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1 \cdots \textcircled{4} \\ (x-1)^2 + y^2 = 1 \cdots \textcircled{1} \end{cases}$$

$$\therefore (x, y) = \left(\frac{\pm\sqrt{3}}{2} + 1, \frac{1}{2}\right)$$

$$S = 2 \left[\int_{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sqrt{1-(x-1)^2} - (-\sqrt{1-(x-1)^2} + 1) \right\} dx \right]$$

$$= 2 \left\{ \int_{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}^{\frac{1}{2}} (2\sqrt{1-(x-1)^2} - 1) dx \right\}$$

$$x-1 = \sin \theta \quad 2-\sqrt{3} < \cdots \textcircled{1}$$

$$\frac{dx}{d\theta} = \cos \theta$$

$$dx = \cos \theta d\theta \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$x = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$\sin \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$\theta = -\frac{\pi}{6} \quad \text{--- ③}$$

$$x = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$$

$$\sin \theta = (1 - \frac{\sqrt{3}}{2}) \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{6}$$

$$\sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\theta = -\frac{\pi}{3} \quad \text{--- ④}$$

① ② ③ ④ ⑤

$$S = 2 \int_{-\frac{\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{6}} (2\sqrt{1-\sin^2\theta} - 1) \cos\theta d\theta$$

$$= 2 \int_{-\frac{\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{6}} (2\sqrt{\cos^2\theta} - 1) \cos\theta d\theta$$

$$= 2 \int_{-\frac{\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{6}} (2\cos\theta - 1) \cos\theta d\theta$$

$$= 2 \int_{-\frac{\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{6}} (2\cos^2\theta - \cos\theta) d\theta$$

$$= 2 \int_{-\frac{\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{6}} \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2} - \cos\theta \right) d\theta$$

$$= 2 \int_{-\frac{\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{6}} (1 + \cos 2\theta - 2\cos\theta) d\theta$$

$$= 2 \left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2} - 2\sin\theta \right]_{-\frac{\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{6}}$$

$$= 2 \left\{ -\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} - \left(-\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right\}$$

$$= 2 \left(-\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} + \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$= 2 \left(\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\pi}{3} + 1 - \sqrt{3} = \frac{\pi + 3 - 3\sqrt{3}}{3}$$

$$\int \cos 2\theta d\theta$$

$$2\theta = z \Rightarrow z = 2\theta$$

$$\frac{dz}{d\theta} = 2$$

$$dz = 2 d\theta$$

$$d\theta = \frac{1}{2} dz$$

$$\int \cos z \frac{dz}{2}$$

相似比 1:10 面積比 1:100

したがって

$$\frac{100\pi + 300 - 300\sqrt{3}}{3} \dots\dots (\text{答})$$
$$\frac{\pi + 3 - 3\sqrt{3}}{3} \times 100$$

私の数学研究

私が数学教師のなり立ての頃、友人が小学生の児童にもわかるように、**資料 1**の問題を解いてほしいとの依頼を受けたのがこの問題の出合いでした。面積を求める問題で一見単純そうに見えたのが第一印象でしたが、今後十数年悩む問題になるとは夢にも思いませんでした。

まず**解法 1**の解き方で説明しましたが、友人は分かり切ったことだと納得してもらえなかった。これは、区分求積法の理論に由来するものだと言うまでもなかった。ある児童が小学校で円の面積を求める問題がありました。なるべく小さなマス目の方眼紙に円を描き、マス目の数を数えて求めたいらしいです。このような方法で解き先生に強くしかられ、数学嫌いになったことを聞いたことがある。円の面積の公式（半径×半径×3.14）の詰め込みだけでは数学の指導法はだめだと思う、また、数学嫌いの原因になるのは数学教師として責任を感じず。

2度目の出合いは、企業の懸賞付き問題で妻の友人が私に尋ねてきた。これは相手が小学生でなかったので**解法 3**と**解法 4**の方法で説明し納得したようである。しかし、私には、小学生に教えることにはまだ解決には至らないので、悩むばかりである。また、ある数学の授業で余弦定理を説明しているとき、これを使ってこの問題を解いてみようと思ったのが**解法 2**である。しかし、どれにしても小学生に教えるには問題の解決には至っていない。

数年が過ぎ、3学年の積分の授業のき、ふと昔の問題を思いだし今度は積分を使って解いてみようと思ったのが**解法 5**である。

教職も退職間近の昨今の私ですが、この問題は結局解決には至っていない。この問題を解決するためには、最低限度の知識として平方根が必要であることは明白である。いわゆる $\sqrt{\quad}$ の知識です。したがって、平方根の学習は中学3年であるから小学生では解けないこととなります。数学教師として何十年悩んだ問題ですが、5通りの解き方を発見したのは大きな成果だと思う。

この問題をヒントに、我々は人生において少なからず色んなトラブルが起こると思います。問題解決するために、色んな方法でトラブルを解決していくことが大切で、何通りもの解決方法を模索するような生き方が最も大切だと感じました。

平成23年7月28日

タッチ